Soluzioni del Tutorato di Statistica 1 del 11/10/2010
Docente: Prof.ssa Enza Orlandi
Tutore: Dott.ssa Barbara De Cicco

Esercizio 1.
Siano $X_1, ..., X_n$ v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.) t.c. :
$f_X(x) = x^{-2} 1_{(1,+\infty)}(x)$
Sia $Y = min\{X_1, ..., X_n\}$
Esiste $E[X_1]$? Esiste $E[Y]$? Se si trovatela.
$E[X] = \int_1^{+\infty} \frac{x}{x^2} dx = +\infty$ poichè $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} < +\infty$ per $\alpha > 1$, quindi non esiste $E[X]$.

$F(Y) = P(Y \leq y) = P(min\{X_1, ..., X_n\} \leq y) =$
$1 - P(min\{X_1, ..., X_n\} > y) = 1 - \prod_{i=1}^n P(X_i > y) = 1 - \prod_{i=1}^n \int_y^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx =$
$1 - (\frac{1}{y})^n$
$f_Y(y) = \frac{n}{y^{n+1}}$
$E[Y] = \int_1^{+\infty} \frac{yn}{y^{n+1}} = \frac{n}{n-1}$

Esercizio 2.
Date X, Y variabili aleatore, dimostrare le seguenti uguaglianze:

1. $E(aY + bZ|X) = aE(Y|X) + bE(Z|X)$ con $a, b \in R$
   $E(aY + bZ|X) = \sum_{y,z}(ay + bz)P(Y = y, Z = z|X = x) =$
   $a\sum_{y,z} yP(Y = y, Z = z|X = x) + b\sum_{y,z} P(Y = y, Z = z|X = x) =$
   $a\sum_y yP(Y = y|X = x) + b\sum_z zP(Z = z|X = x) = aE(Y|X) + bE(Z|X)$

2. Se X e Y sono indipendenti allora $E(Y|X) = E(Y)$
   $E[X|Y] = \sum_x xP(X = x|Y = y) = \sum_x x\frac{P(X=x,Y=y)}{P(Y=y)} = E[X]$

Esercizio 3.
Sia X una v.a. con densità:
$f_X(x) = 2xe^{-x^2} 1_{(0,+\infty)}(x)$

1. Determinare la distribuzione di $Y = X^2$ usando la f.g.m.
   $E[e^{tY}] = E[e^{tX^2}] = \int_0^{+\infty} e^{tx^2} 2xe^{-x^2} dx = \frac{1}{1-t}\int_0^{+\infty} 2x(1-t)e^{-x^2(1-t)} dx =$
   $\frac{1}{1-t}$
   Per $t < 1$ il risultato trovato corrisponde alla f.g.m. di una v.a. Esponenziale di parametro 1.

2. Sia $Y_1, ..., Y_n$ un campione casuale con la stessa distribuzione di X. Determinare la distribuzione di $Z = \sum_{i=1}^n Y_i$

$E[e^{tZ}] = E[e^{t\sum_{i=1}^{n} Y_i}] = \prod_{i=1}^{n} E[e^{tY}] = (\frac{1}{1-t})^n$
Allora $Z \sim \Gamma(n, 1)$

Esercizio 4.
Sia $X_1, X, ..., X_n$ un campione casuale da $Poisson(\lambda)$. Determinare la funzione generatrice dei momenti di $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$ e di $\bar{X}$.
$E[e^{tS}] = E[e^{t\sum_{i=1}^{n} X_i}] = \prod_{i=1}^{n} E[e^{tX}] = \prod_{i=1}^{n}(\sum_{x=0}^{+\infty} e^{tx}\frac{e^{\lambda}\lambda^x}{x!}) = \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{+\infty}\frac{(e^t\lambda)^x}{x!} = e^{\lambda n(e^t-1)}$

$E[e^{t\bar{X}}] = E[e^{t/n\sum_{i=1}^{n} X_i}] = E[e^{t/nS}] = e^{\lambda n(e^{t/n}-1)}$

Esercizio 5.
Sia $X_1, X_2, ..., X_n$ un campione casuale dalla distribuzione Uniforme sull'intervallo di ampiezza a centrato in θ. Siano $Y_1 = min\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ e $Y_n = max\{X_1, X_2, ..., X_n\}$. Determinare le distribuzioni di Y_1 e Y_n.

$P(Y_1 \leq y) = P(min\{X_1, .., X_n\} \leq y) = 1 - P(min\{X_1, ..., X_n\} > y) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P(X > y) = 1 - \prod_{i=1}^{n}\int_y^{+\infty}\frac{1}{a}1_{[\theta-\frac{a}{2},\theta+\frac{a}{2}]}(x)dx = 1 - \frac{1}{a^n}(\frac{a}{2}+\theta-y)^n$ se $y \in (\theta - \frac{a}{2}, \theta + \frac{a}{2})$
Invece se $y > \theta + \frac{a}{2}$, $P(Y_1 \leq y) = 1$ e se $y < \theta - \frac{a}{2}$, $P(Y_1 \leq y) = 0$

Allora $f_Y(y) = \frac{n}{a^n}(\frac{a}{2}+\theta-y)^{n-1}1_{[\theta-\frac{a}{2},\theta+\frac{a}{2}]}(x)$

$P(Y_n \leq y) = P(max\{X_1, ..., X_n\} \leq y) = P(X_1 \leq y, ..., X_n \leq y) = \prod_{i=1}^{n} P(X \leq y) = \prod_{i=i}^{n}\int_{\theta-\frac{a}{2}}^{y}\frac{1}{a}dx = \frac{1}{a^n}(y-\theta+\frac{a}{2})^n$ se $y \in (\theta - \frac{a}{2}, \theta + \frac{a}{2})$
Invece se $y > \theta + \frac{a}{2}$, $P(Y_n \leq y) = 1$ e se $y < \theta - \frac{a}{2}$, $P(Y_n \leq y) = 0$

Allora: $f_{Y_n}(y) = \frac{n}{a^n}(y-\theta+\frac{a}{2})^{n-1}1_{[\theta-\frac{a}{2},\theta+\frac{a}{2}]}(x)$